Sistemi Lineari e Tempo-Invarianti (SLI) – Risposta impulsiva e al gradino

by http://www.oasitech.it

Con sistema SLI si intende un sistema lineare e tempo invariante, rispetto alla seguente figura:

Lineare: si ha quando per esso è valida la sovrapposizione degli effetti

$$y(t)=T[\sum a_i x_i(t)]=\sum a_i T[x_i(t)]$$

con T[] si è indicata la generica trasformazione del filtro sul segnale di ingresso

Tempo-invariante: quando a una traslazione dell'ingresso corrisponde una traslazione dell'uscita rispetto allo stesso segnale applicato in precedenza

x(t) → y(t) => x(t-t0) → y(t-t0)

I sistemi RLC con componenti passivi sono tipici filtri lineari e tempo-invarianti.

L'uscita del sistema è come ben noto l'integrale di convoluzione del segnale di ingresso con la risposta impulsiva del sistema stesso.
Quindi:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)h(t-\alpha)d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

questo perchè il segnale di ingresso può essere visto come una successione di impulsi e quindi l'uscita è proprio la sovrapposizione di questi impulsi.
Nella formula di cui sopra x(t) rappresenta il segnale di ingresso, h(t) la risposta all'impulso e y(t) il segnale di uscita.
Un'altra risposta interessante è quella al gradino; essa può essere usata in molte situazioni.
Avendo:

$$\delta(t)=\frac{(du(t))}{dt} \quad => \quad u(t)=\int_{-\infty}^{t} \delta(\alpha)d\alpha$$

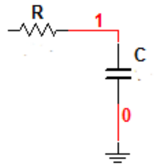
quindi: $g(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\alpha)d\alpha$

con ovvio significato dei simboli.
Questa relazione è molto importante perchè ci consente di calcolare g(t) e h(t) semplicemente una dall'altra.

Filtri del primo ordine

Filtro Passa Basso

Un tipico filtro è il seguente



è una squadra RC del primo ordine passa basso. La risposta impulsiva può essere ottenuta antitrasformando la funzione di trasferimento calcolata con la trasformata di laplace, abbiamo:

$$H(s)=\frac{(\frac{1}{Cs})}{(R+\frac{1}{Cs})}=\frac{1}{(RCs+1)}=(\frac{1}{\tau})\frac{1}{(s+1/\tau)}$$

avendo posto: $\tau=RC$ essa è la costantye di tempo del circuito RC in esame.

Ricordiamo che

$$L^{-1}(\frac{1}{(s-p)})=e^{pt}u(t)$$

quindi

$$H(f)\Leftrightarrow h(t)=(\frac{1}{\tau})e^{-(t/\tau)}u(t)$$

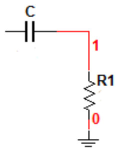
mentre la risposta al gradino è:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\alpha)d\alpha=\int_{-\infty}^{t}(\frac{1}{\tau})e^{-(\alpha/\tau)}u(\alpha)d\alpha=\int_{0}^{t}(\frac{1}{\tau})e^{-(\alpha/\tau)}d\alpha=(1-e^{-(t/\tau)})u(t)$$

com'è ovvio, essa segue il gradino avvicinandosi ad esso all'aumentare del tempo. Questo è dovuto alla carica del condensatore. Dopo un po' di tempo ovviamente il condensatore si carica alla tensione del gradino, mentre la corrente tende a zero, diventando il condensatore in pratica un circuito aperto. Questo è ovvio: dopo il transitorio l'equilibrio è raggiunto e l'equilibrio è il circuito a regime continuo.

Filtro Passa Alto

Il circuito duale a questo è ovviamente il filtro passa alto



Vediamo innanzitutto la funzione di trasferimento:

$$H(s)=\frac{R}{(R+\frac{1}{(Cs)})}=\frac{RCs}{(RCs+1)}$$

per esso non abbiamo un'antitrasformata notevole, quindi conviene sviluppare tendendo conto di quest'ultima:

$$H(s)=\frac{R}{(R+\frac{1}{(Cs)})}=\frac{(RCs+1-1)}{(RCs+1)}=1-\frac{1}{(RCs+1)}=1-(\frac{1}{\tau})(\frac{1}{(s+\frac{1}{\tau})})$$

quindi:

$$H(s)\Leftrightarrow h(t)=\delta(t)-(\frac{1}{\tau})e^{-(t/\tau)}u(t)$$

per la risposta al gradino abbiamo:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\alpha)d\alpha=\int_{-\infty}^{t}(\delta(\alpha)-(\frac{1}{\tau})e^{-(\alpha/\tau)}u(\alpha))d\alpha=\int_{0}^{t}(\delta(\alpha)-(\frac{1}{\tau})e^{-(\alpha/\tau)})d\alpha$$

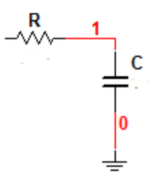
quindi sviluppando:

$$g(t)=e^{-(t/\tau)}u(t)$$

anche in questo caso l'interpretazione è immediata. A mano a mano che il tempo aumenta andiamo verso una situazione di regime in cui il condensatore risulta un circuito aperto, e quindi l'uscita in condizioni statiche quali quelle di regime è nulla.
Un ingresso interessante è quello in cui a questi circuiti viene immesso un segnale rect() oppure onda quadra (ripetizione di segnali rect: rettangolare)

Risposta alla rect

Prendiamo ad esempio il caso passa basso:



sia $x(t)=rect(t/T)$

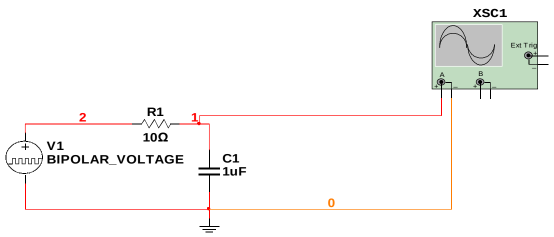
un impulso rettangolare centrato in zero e durata T; poiché è valida la sovrapposizione degli effetti;

$$x(t)=rect(t/T)=u(t)-u(t-T)$$

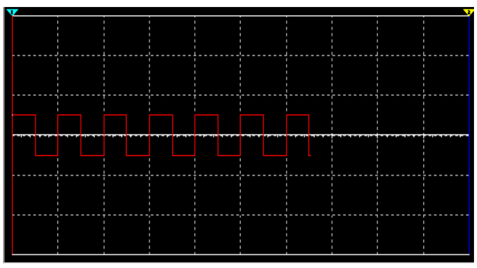
la scompongo come sovrapposizione di due gradini, poiché è valida la sovrapposizione degli effetti, l'uscita posso scriverla come:

$$y(t)=g(t)-g(t-T)=(1-e^{-(t/\tau)})u(t)-(1-e^{-((t-T)/\tau)})u(t-T)$$

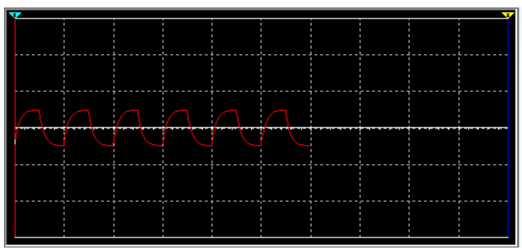
altrimenti dovremmo usare l'integrale di convoluzione.
Il risultato può essere esteso se l'ingresso è costituito da un'onda quadra, dato che è semplicemente una sovrapposizione di rect; significa semplicemente che l'uscita sarà una sovrapposizione delle y(t) sopra trovata. Nel seguente circuito RC è rappresentato il segnale di ingresso e di uscita simulato per mezzo del workbench Multisim 10



Segnale di ingresso con duty cicle 100%



Segnale di uscita:



in pratica come si vede in questo caso l'uscita è praticamente l'integrale del segnale di ingresso.
Il circuito appena visto passa basso per frequenze elevate risulta in pratica un integratore; infatti:

$$H(s)=\frac{1}{(1+s\tau)}$$

se il sistema è stabile è lecito passare alla cosiddetta risposta in frequenza operando la trasformazione $s \Rightarrow j\omega$, in questo caso il sistema è certamente stabile perchè il suo unico polo è a parte reale negativa, quindi:

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega\tau)}$$

per $\omega \rightarrow \infty$

$$H(\omega) \simeq \frac{1}{(j\omega\tau)}$$

come si vede se la costante di tempo si avvicina a uno essa è proprio la risposta in fequenza di un integratore.
Analoghi argomenti possono essere usati per studiare un filtro passa alto, eventualmente anche di ordine superiore.