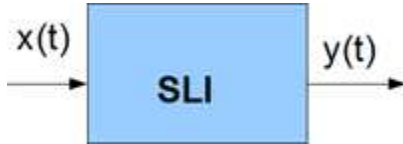


Sistemi Lineari e Tempo-Invarianti (SLI) – Risposta impulsiva e al gradino

by <http://www.oasitech.it>

Con sistema SLI si intende un sistema lineare e tempo invariante, rispetto alla seguente figura:



Lineare: si ha quando per esso è valida la sovrapposizione degli effetti

$$y(t) = T[\sum a_i x_i(t)] = \sum a_i T[x_i(t)]$$

con $T[\]$ si è indicata la generica trasformazione del filtro sul segnale di ingresso

Tempo-invariante: quando a una traslazione dell'ingresso corrisponde una traslazione dell'uscita rispetto allo stesso segnale applicato in precedenza

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$$

I sistemi RLC con componenti passivi sono tipici filtri lineari e tempo-invarianti.

L'uscita del sistema è come ben noto l'integrale di convoluzione del segnale di ingresso con la risposta impulsiva del sistema stesso.

Quindi:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$

questo perchè il segnale di ingresso può essere visto come una successione di impulsi e quindi l'uscita è proprio la sovrapposizione di questi impulsi.

Nella formula di cui sopra $x(t)$ rappresenta il segnale di ingresso, $h(t)$ la risposta all'impulso e $y(t)$ il segnale di uscita.

Un'altra risposta interessante è quella al gradino; essa può essere usata in molte situazioni.

Avendo:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\alpha) d\alpha$$

quindi:
$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\alpha) d\alpha$$

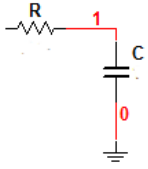
con ovvio significato dei simboli.

Questa relazione è molto importante perchè ci consente di calcolare $g(t)$ e $h(t)$ semplicemente una dall'altra.

Filtri del primo ordine

Filtro Passa Basso

Un tipico filtro è il seguente



è una squadra RC del primo ordine passa basso. La risposta impulsiva può essere ottenuta antitrasformando la funzione di trasferimento calcolata con la trasformata di Laplace, abbiamo:

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{Cs}\right)}{\left(R + \frac{1}{Cs}\right)} = \frac{1}{(RCs + 1)} = \left(\frac{1}{\tau}\right) \frac{1}{(s + 1/\tau)}$$

avendo posto: $\tau = RC$ essa è la costante di tempo del circuito RC in esame.

Ricordiamo che

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-p)}\right) = e^{pt} u(t)$$

quindi

$$H(f) \Leftrightarrow h(t) = \left(\frac{1}{\tau}\right) e^{-(t/\tau)} u(t)$$

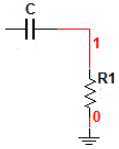
mentre la risposta al gradino è:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^t \left(\frac{1}{\tau}\right) e^{-(\alpha/\tau)} u(\alpha) d\alpha = \int_0^t \left(\frac{1}{\tau}\right) e^{-(\alpha/\tau)} d\alpha = (1 - e^{-(t/\tau)}) u(t)$$

com'è ovvio, essa segue il gradino avvicinandosi ad esso all'aumentare del tempo. Questo è dovuto alla carica del condensatore. Dopo un po' di tempo ovviamente il condensatore si carica alla tensione del gradino, mentre la corrente tende a zero, diventando il condensatore in pratica un circuito aperto. Questo è ovvio: dopo il transitorio l'equilibrio è raggiunto e l'equilibrio è il circuito a regime continuo.

Filtro Passa Alto

Il circuito duale a questo è ovviamente il filtro passa alto



Vediamo innanzitutto la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

per esso non abbiamo un'antitrasformata notevole, quindi conviene sviluppare tenendo conto di quest'ultima:

$$H(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{(RCs + 1 - 1)}{(RCs + 1)} = 1 - \frac{1}{(RCs + 1)} = 1 - \left(\frac{1}{\tau}\right) \left(\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right)$$

quindi:

$$H(s) \Leftrightarrow h(t) = \delta(t) - \left(\frac{1}{\tau}\right) e^{-(t/\tau)} u(t)$$

per la risposta al gradino abbiamo:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^t \left(\delta(\alpha) - \left(\frac{1}{\tau}\right) e^{-(\alpha/\tau)} u(\alpha)\right) d\alpha = \int_0^t \left(\delta(\alpha) - \left(\frac{1}{\tau}\right) e^{-(\alpha/\tau)}\right) d\alpha$$

quindi sviluppando:

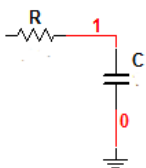
$$g(t) = e^{-(t/\tau)} u(t)$$

anche in questo caso l'interpretazione è immediata. A mano a mano che il tempo aumenta andiamo verso una situazione di regime in cui il condensatore risulta un circuito aperto, e quindi l'uscita in condizioni statiche quali quelle di regime è nulla.

Un ingresso interessante è quello in cui a questi circuiti viene immesso un segnale $\text{rect}()$ oppure onda quadra (ripetizione di segnali rect : rettangolare)

Risposta alla rect

Prendiamo ad esempio il caso passa basso:



sia $x(t) = \text{rect}(t/T)$

un impulso rettangolare centrato in zero e durata T; poiché è valida la sovrapposizione degli effetti;

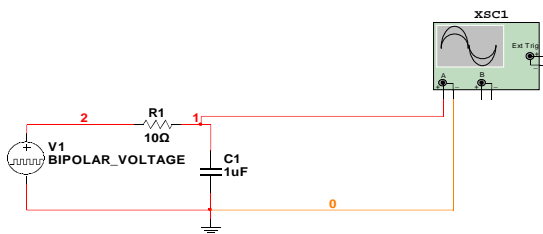
$$x(t) = \text{rect}(t/T) = u(t) - u(t-T)$$

la scompongo come sovrapposizione di due gradini, poiché è valida la sovrapposizione degli effetti, l'uscita posso scriverla come:

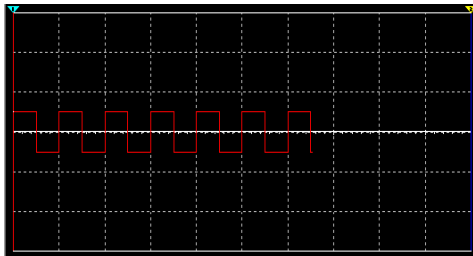
$$y(t) = g(t) - g(t-T) = (1 - e^{-(t/\tau)})u(t) - (1 - e^{-(t-T)/\tau})u(t-T)$$

altrimenti dovremmo usare l'integrale di convoluzione.

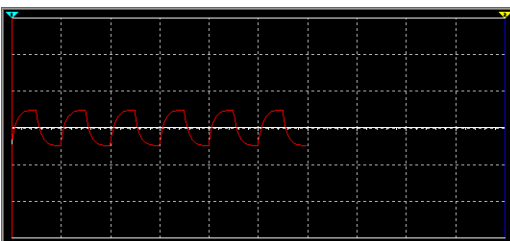
Il risultato può essere esteso se l'ingresso è costituito da un'onda quadra, dato che è semplicemente una sovrapposizione di rect; significa semplicemente che l'uscita sarà una sovrapposizione delle $y(t)$ sopra trovata. Nel seguente circuito RC è rappresentato il segnale di ingresso e di uscita simulato per mezzo del workbench Multisim 10



Segnale di ingresso con duty cycle 100%



Segnale di uscita:



in pratica come si vede in questo caso l'uscita è praticamente l'integrale del segnale di ingresso. Il circuito appena visto passa basso per frequenze elevate risulta in pratica un integratore; infatti:

$$H(s) = \frac{1}{(1 + s\tau)}$$

se il sistema è stabile è lecito passare alla cosiddetta risposta in frequenza operando la trasformazione $s \Rightarrow j\omega$, in questo caso il sistema è certamente stabile perchè il suo unico polo è a parte reale negativa, quindi:

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega\tau)}$$

per $\omega \rightarrow \infty$

$$H(\omega) \simeq \frac{1}{(j\omega\tau)}$$

come si vede se la costante di tempo si avvicina a uno essa è proprio la risposta in frequenza di un integratore.

Analoghi argomenti possono essere usati per studiare un filtro passa alto, eventualmente anche di ordine superiore.